**Feuille 1 – Corrigé**

Exercice 1 : On peut écrire explicitement  :

Ainsi

Donc on a . Donc est inversible, d’inverse .

Exercice 2 :

Un calcul rapide de donne . Par récurrence sur , on prouve  :

Initialisation :  : , c’est bon

Hérédité : Soit tel que .

Alors

Ainsi

Exercice 3 :

On a . Raisonnons par analyse-synthèse :

Supposons inversible. Alors en multipliant par de chaque côté de l’équation, on a .

Ainsi est la seule solution de l’équation.

Réciproquement, vérifions que respecte bien la condition imposée sur .

Ainsi est la seule solution.

Exercice 4 :

1. On obtient la réponse par simple calcul direct :

Ainsi cette suite est une suite géométrique de raison , donc

(si le résultat n’est pas évident pour vous, on peut le prouver grâce à une récurrence simple)

1. Vous pouvez utiliser le pivot de Gauss, même si la formule la plus rapide ici est :

(valable uniquement si )

Ainsi on obtient .

Ainsi on a

Cette matrice est diagonale, il est donc très facile d’en extraire les puissances.

1. On peut prouver par récurrence que pour tout ,

Initialisation :

On a et .

Hérédité : Soit tel que

Alors

Ainsi la propriété est vraie pour tout .

1. On a donc, d’après la question précédente :

Ainsi,

Et on en déduit les expressions de et :

Exercice 5 :

Soit . Notons et .

On cherche donc à trouver une expression de en fonction des coefficients de .

D’après la formule du produit matriciel,

Donc sur les diagonales, on obtient

Ainsi, puisque la trace est la somme des coefficients diagonaux, on a :

Donc .